

Annexe

Extrait du texte original de Cléomède rapportant la découverte d'Ératosthène

« Qu'il soit admis pour nous :

- premièrement que Syène et Alexandrie sont établies sous le méridien ;
- deuxièmement que la distance entre les deux cités est de 5 000 stades ;
- troisièmement que les rayons envoyés de différents endroits du soleil sur différents endroits de la Terre sont parallèles ; en effet, les géomètres supposent qu'il en est ainsi ;
- quatrièmement que ceci soit admis comme démontré auprès des géomètres, que les droites sécantes des parallèles forment des angles alternes égaux ;
- cinquièmement que les arcs de cercle qui reposent sur des angles égaux sont semblables, c'est-à-dire qu'ils ont la même similitude et le même rapport relativement aux cercles correspondants, ceci étant démontré aussi chez les géomètres. Lorsqu'en effet les arcs de cercle reposent sur des angles égaux, quel que soit l'un (d'entre eux), s'il est la dixième partie de son propre cercle, tous les autres seront les dixièmes parties de leurs propres cercles.

Celui qui pourrait se prévaloir de ces faits comprendrait sans difficulté le cheminement d'ÉRATOSTHÈNE qui tient en ceci : il affirme que Syène et Alexandrie se tiennent sous le même méridien [...]. Il dit aussi, et il en est ainsi, que Syène est située sous le tropique de l'été. À cet endroit, au solstice d'été, lorsque le Soleil est au milieu du ciel, les gnomons des cadrans solaires concaves sont nécessairement sans ombres, le soleil se situant exactement à la verticale [...]. À Alexandrie à cette heure-là, les gnomons des cadrans solaires projettent une ombre, puisque cette ville est située davantage vers le nord que Syène [...].

Si nous nous représentons des droites passant par la Terre à partir de chacun des gnomons, elles se rejoindront au centre de la Terre. Lorsque donc le cadran solaire de Syène est à la verticale sous le soleil, si nous imaginons une ligne droite venant du Soleil jusqu'au sommet du gnomon du cadran, il en résultera une ligne droite venant du soleil jusqu'au centre de la Terre.

Si nous imaginons une autre ligne droite à partir de l'extrémité de l'ombre du gnomon et reliant le sommet du gnomon du cadran d'Alexandrie au soleil, cette dernière ligne et la ligne qui précède seront parallèles, reliant différents points du Soleil à différents points de la Terre.

Sur ces droites donc, qui sont parallèles, tombe une droite qui va du centre de la terre jusqu'au gnomon d'Alexandrie, de manière à créer des angles alternes égaux ; l'un

d'eux se situe au centre de la Terre à l'intersection des lignes droites qui ont été tirées des cadrans solaires jusqu'au centre de la Terre, l'autre se trouve à l'intersection du sommet du gnomon d'Alexandrie et de la droite tirée de l'extrémité de son ombre jusqu'au soleil, à son point de contact avec le gnomon.

Et sur cet angle s'appuie l'arc de cercle qui fait le tour de la pointe de l'ombre du gnomon jusqu'à sa base tandis que celui qui est proche du centre de la Terre s'appuie l'arc qui va de Syène à Alexandrie. Ces arcs de cercle sont donc semblables l'un à l'autre en s'appuyant sur des côtés égaux. Le rapport qu'a l'arc du cadran avec son propre cercle, l'arc qui va de Syène à Alexandrie a ce rapport aussi. Mais on trouve que l'arc du cadran est la cinquantième partie de son propre cercle. Il faut donc nécessairement que la distance qui va de Syène à Alexandrie soit la cinquantième partie du plus grand cercle de la Terre. Et elle est de 5 000 stades. Le cercle dans sa totalité fait donc 250 000 stades. Voilà la méthode d'ÉRATOSTHÈNE ».

CLÉOMÈDE, *Le mouvement circulaire des corps célestes*,
dans la traduction de Richard GOULET

Quelques éléments historiques et didactiques sur l'expérience d'Ératosthène

par **Nicolas DECAMP** et **Cécile de HOSSON**

Laboratoire de didactique André Revuz

Université Paris-Diderot - 75013 Paris

nicolas.decamp@univ-paris-diderot.fr

cecile.dehossou@univ-paris-diderot.fr

RÉSUMÉ

La forme scolaire usuelle de la mesure du périmètre terrestre par la méthode dite « d'Ératosthène » se présente généralement comme l'adaptation d'une découverte historique. À ce titre, les activités conçues autour de cette découverte se posent comme une réponse aux plaidoyers institutionnels en faveur d'une plus grande insertion d'éléments historiques au sein de la classe de science. L'analyse historique que nous présentons dans cet article montre que la forme traditionnellement prise par la découverte d'ÉRATOSTHÈNE dans les différents supports pédagogiques disponibles diffèrent notablement des éléments historiques dont nous disposons aujourd'hui. Cet écart est certes inhérent à tout projet de construction pédagogique, mais il doit pouvoir se justifier par un certain nombre de contraintes qui sont à l'origine de notre programme de « reconstruction didactique » qui inclut la nécessaire visibilité d'un matériau historique de première main : « le mouvement circulaire des corps célestes ».

INTRODUCTION

Depuis quelques années, la découverte de la mesure du périmètre terrestre par la méthode dite « d'Ératosthène » s'est invitée dans les programmes d'enseignement des sciences physiques et s'offre comme support d'exercices dans certains manuels de mathématiques de collège. De nombreuses voies d'approche sont possibles pour traiter cette découverte historique ; citons entre autres : des observations grandeur nature [18, 25], des expérimentations en modèle réduit [14, 22] ou plus classiquement des études de documents. Parmi ces dernières, il est rarement fait référence au texte original de CLÉOMÈDE. Nous nous proposons ici de montrer en quoi une exploitation directe de ce texte (que nous reproduisons en annexe) peut être riche, tant du point de vue historique que scientifique et ce que son étude peut apporter sur le plan didactique.

1. ÉLÉMENTS HISTORIQUES

L'ouvrage écrit par ÉRATOSTHÈNE intitulé *Sur la mesure de la terre* (deux livres) est malheureusement perdu. Nous n'avons connaissance de ses travaux que par des sources indirectes ; on cite généralement CLÉOMÈDE, STRABON, HÉRON D'ALEXANDRIE et GEMINOS DE RHODES pour ce qui est des auteurs grecs ; PLIN L'ANCIEN, MACROBE, MARTIANUS CAPELLA, VITRUVÉ ou encore CENSORIN pour ce qui est des auteurs latins (cf. bibliographie). La plupart de ces sources se contentent de donner la valeur (252 000 stades) trouvée par ÉRATOSTHÈNE pour la circonférence terrestre, sans détailler sa méthode. Le texte de CLÉOMÈDE est en contradiction avec toutes les autres sources puisqu'il indique 250 000 stades (nous reviendrons sur cette valeur), mais il est le seul à détailler la méthode utilisée⁽¹⁾.

Ce qui pourrait être considéré comme un défaut (un résumé en quelques paragraphes ne peut que passer sous silence nombre des détails des deux livres d'ÉRATOSTHÈNE) est également ce qui rend ce récit abordable par des lycéens ; l'ouvrage de CLÉOMÈDE peut d'ailleurs être considéré comme l'équivalent de nos manuels scolaires⁽²⁾ modernes et était destiné aux jeunes stoïciens [12].

1.1. Contexte historique de la découverte d'Ératosthène

Avant d'étudier plus avant le texte de CLÉOMÈDE, rappelons ici le contexte de la découverte d'ÉRATOSTHÈNE.

Celui-ci, né à Cyrène (dans l'actuelle Lybie) vers 275 av. J.-C., se forma à Athènes où il se rendit probablement vers 255 av. J.-C. Refusant de se laisser endoctriner par une seule école philosophique, il alla de l'une à l'autre, ouvrant son esprit à la diversité des opinions et à leur relativité. Ses premiers ouvrages datent de cette époque. Il fut alors invité à Alexandrie par le troisième roi d'Égypte (PTOLÉMÉE III ÉVERGÈTE) pour y assurer l'éducation de son fils et diriger la fameuse Bibliothèque, charge qu'il assumait à partir de 245 av. J.-C. et pendant plus de quarante ans [11].

À la suite des conquêtes d'ALEXANDRE LE GRAND (356-323 av. J.-C.) jusqu'aux rives de l'Indus et de l'expédition plus douteuse de PYTHÉAS le massaliote jusqu'aux abords du cercle polaire (env. 330 av. J.-C.), le monde grec s'était considérablement étendu.

(1) Selon Russo [31], bien que cette méthode semble aujourd'hui facile à comprendre en s'aidant d'un dessin, ce passage d'un dessin à des conclusions valables pour la Terre entière était incompréhensible pour une civilisation présocratique. RUSSO [31] fait alors remarquer qu'aucun auteur latin n'a réussi à l'expliquer de manière acceptable. Il cite en particulier PLIN (II, 248) qui se voit contraint pour justifier la valeur de 252 000 stades à remplacer le voyage intellectuel d'ÉRATOSTHÈNE entre le monde et la théorie, par un voyage concret de DIONYSODORE au centre de la Terre, tout en affirmant ne pas vouloir y croire. Ces difficultés des anciens sont peut-être à rapprocher des difficultés des élèves lors du passage d'une échelle à une autre telles que les ont mis en évidence Feigenberg et al. [17].

(2) À la fin de son ouvrage (II, 7, 2), CLÉOMÈDE écrit : « ces notes de cours (*σχολαί*) ne contiennent pas les opinions mêmes de l'auteur, mais elles ont été rassemblées à partir d'ouvrages anciens ou plus récents. La plupart de ces développements sont empruntés aux ouvrages de POSIDONIUS ».

La géométrie sphérique de la terre était devenue d'usage courant dès le IV^e siècle av. J.-C. et s'accordait bien avec les modifications de l'horizon local lors de l'observation des astres (ARISTOTE, *De Caelo*, II, 14), ou encore avec l'observation de l'ombre de la Terre lors des éclipses de Lune (ARISTOTE, *De Caelo*, II, 13).

Il ne restait plus à ÉRATOSTHÈNE qu'à en déterminer avec justesse la circonférence. En effet jusqu'alors les chiffres avancés reposaient probablement sur de la pure spéculation, bien qu'ARISTOPHANE (V^e av. J.-C.) évoque la possibilité d'une mesure de la Terre par la géométrie (*Les Nuées*, 202-204).

Citons pour mémoire ARISTOTE qui indique 400 000 stades (*De Caelo*, II, 16, 298a) et ARCHIMÈDE qui dans son ouvrage l'Arénaire (I,1) propose arbitrairement 3 000 000 de stades (soit dix fois la valeur avancée peut-être par DICÉARQUE de Messine).

1.2. La méthode d'Ératosthène selon le récit de Cléomède

CLÉOMÈDE après avoir établi dans son ouvrage que la Terre est sphérique (I,8) et qu'elle est au centre du monde (I,9) s'intéresse dans l'extrait que nous avons reproduit en annexe à sa mesure (I,10). Il compare à cet effet deux méthodes (I,10,1), celle de POSEIDONIOS (I,10,2) et celle d'ÉRATOSTHÈNE (I,10,3-5).

Pour exposer la méthode d'Ératosthène, CLÉOMÈDE commence par faire cinq hypothèses :

- ◆ Syène (l'actuelle Assouan) et Alexandrie sont situées sur le même méridien ;
- ◆ la distance entre Syène et Alexandrie est connue (5 000 stades) ;
- ◆ les rayons envoyés par le Soleil arrivent sur Terre parallèles entre eux ;
- ◆ les droites sécantes des parallèles forment des angles alternes égaux ;
- ◆ les arcs de cercle qui reposent sur des angles égaux sont semblables.

Il déduit ensuite de l'hypothèse 1 que si l'on mesure le « grand cercle de la Terre » passant par Alexandrie et Syène, on obtiendra la circonférence terrestre. Puis il fait remarquer qu'au solstice d'été, à Syène (S sur la figure 2, page ci-après) qui se situe sur le tropique du Cancer, les gnomons des cadrans solaires hémisphériques (ou scaphé, cf. figure 1) sont sans ombre, alors qu'au même moment, ceux situés à Alexandrie (A sur la figure 2) projettent une ombre (DA sur la figure 2)

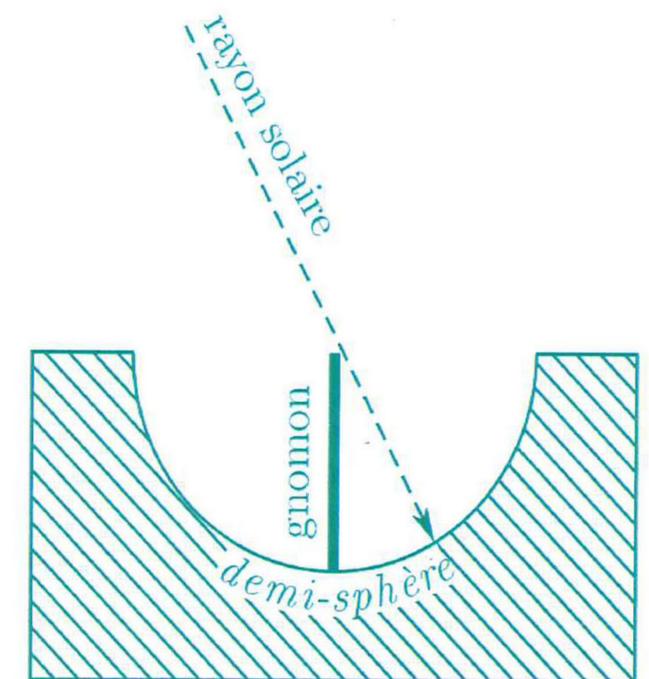


Figure 1 : Cadrans solaire hémisphérique ou Scaphé.

dont la longueur mesurée correspond à environ $1/50^\circ$ du périmètre total de la sphère du scaphé. Par ailleurs, comme les rayons solaires sont parallèles (hypothèse 3), les angles AOS et AED sont égaux (hypothèse 4). Les arcs de cercles AS et AD sont donc semblables (hypothèse 5).

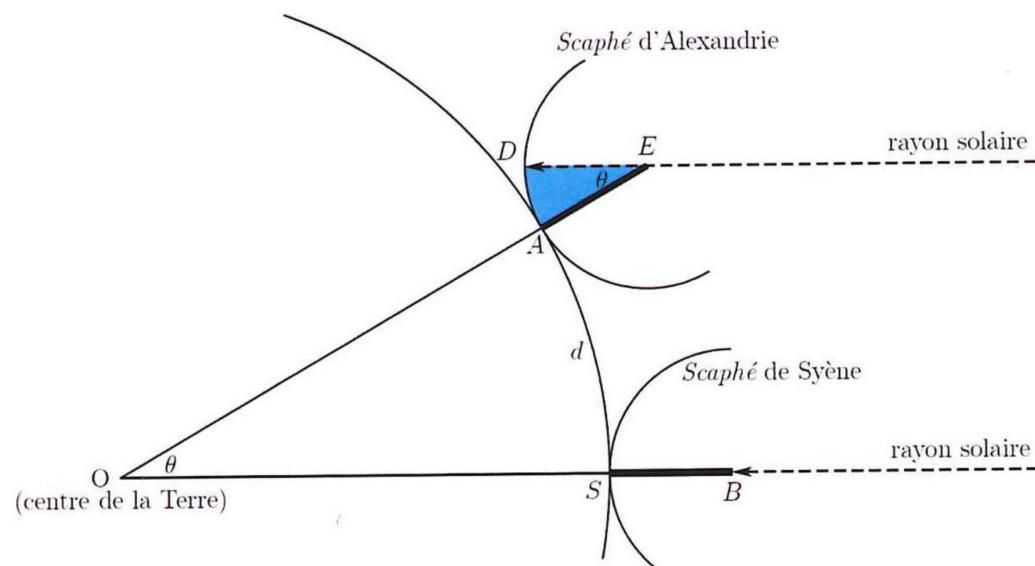


Figure 2 : Schéma représentant la méthode d'ÉRATOSTHÈNE selon le récit de CLÉOMÈDE.

En se basant sur les graduations du scaphé, ÉRATOSTHÈNE constate que l'arc de cercle AD est égal à $1/50^\circ$ du cercle total correspondant ; il en déduit que l'arc de cercle AS est lui aussi égal à $1/50^\circ$ de son cercle total, c'est-à-dire $1/50^\circ$ de la circonférence terrestre. Enfin, comme AS vaut 5 000 stades (hypothèse 2), il en conclut que la circonférence terrestre vaut : $50 \times 5\,000 = 250\,000$ stades.

1.3. Remarques historiques et scientifiques sur ce récit

1.3.1. L'angle mesuré à Alexandrie

Sur ce point, le récit de CLÉOMÈDE diffère sensiblement de la transposition moderne qui en est faite habituellement. CLÉOMÈDE indique qu'ÉRATOSTHÈNE aurait utilisé un scaphé.

Cette utilisation a été largement discutée :

- ◆ SIMAAN [32] citant DELAMBRE [13] la conteste sur la base d'arguments expérimentaux : la mesure serait trop imprécise à cause de la pénombre due au fait que le Soleil n'est pas une source ponctuelle (voir la discussion sur parallélisme des rayons). Cette réfutation semble légère, en effet, selon B. FERRÉ⁽³⁾ le scaphé aurait été utilisé dans l'Antiquité pour mesurer le diamètre apparent du Soleil, mesure nécessitant une précision équivalente⁽⁴⁾.

(3) Note 87 p. 95 de B. FERRÉ dans l'édition des *Noces de la Philologie* avec Mercure de MARTIANUS CAPELLA, tome VI, Livre VI, Paris : Les Belles Lettres, 2007.

(4) Cette méthode n'est cependant pas citée par CLÉOMÈDE qui donne pourtant différents moyens de mesurer

- ◆ GOLDSTEIN [19] conteste également l'utilisation du scaphé, et fait notamment remarquer que l'angle mesuré $1/50^\circ$ ne correspond pas aux divisions (et donc aux graduations) utilisées à l'époque. En effet, les habitudes des astronomes chaldéo-hellénistiques étaient plutôt de diviser le cercle en 12 (comme pour le zodiaque) puis éventuellement en 60. GOLDSTEIN [19] suggère donc que le chiffre de $1/50^\circ$ serait une approximation de CLÉOMÈDE pour $1/50,5$, valeur que l'on pourrait obtenir à partir d'un rapport $1/8$ entre le gnomon et son ombre (plane) au prix d'un raisonnement mathématique compliqué.

D'un autre côté l'utilisation du scaphé semble confirmée par MARTIANUS CAPELLA dans un extrait qui provient probablement d'une source indépendante puisqu'il y est fait référence à une mesure d'ÉRATOSTHÈNE entre Syène et une autre ville (Méroé) non citée par CLÉOMÈDE. Quoi qu'il en soit, l'utilisation directe de la fonction arctangente pour remonter à l'angle mesuré semble anachronique, car les tables trigonométriques donnant les relations entre un angle et sa tangente sont apparues plus tardivement. Par ailleurs, si CLÉOMÈDE avait choisi le biais du scaphé et sa forme sphérique par souci didactique, pourquoi ne pas adopter sa proposition ?

1.3.2. Syène et le tropique du Cancer

CLÉOMÈDE se contente de remarquer que Syène est sur le « tropique d'été » et que les gnomons sont sans ombre. Il n'y a dans son récit nulle mention du puits totalement éclairé souvent évoqué à ce sujet. Il semble cependant que ce puits ait existé, il est en effet mentionné par STRABON (XVII, 1, 48) et par Pline l'Ancien (II, 75). Selon ce dernier, le puits en question aurait en fait été creusé exprès à des fins de vérification expérimentale.

CLÉOMÈDE précise dans son texte que les gnomons sont sans ombre sur un rayon de 150 stades autour du tropique⁽⁵⁾. Cette indication, due au fait que le soleil n'est pas une source ponctuelle (cf. figure 3, page ci-après) est extrêmement intéressante. D'une part parce qu'elle est assez précise : en effet si l'on suppose que le soleil a pour diamètre angulaire $0,5^\circ$ et que la circonférence terrestre vaut 252 000 stades, la zone sur laquelle les gnomons n'ont pas d'ombre est de 350 stades, soit un rayon de 175 stades. D'autre part, elle semble indiquer qu'ÉRATOSTHÈNE s'est donné la peine d'établir la position du tropique avec précision sans se contenter d'assumer qu'il passait à Syène par ouï-dire, ce qui n'était d'ailleurs pas exactement le cas à cette époque (selon DUTKA [15], le tropique passait alors à $21'$ au sud de Syène).

On peut donc supposer d'une part qu'il aura pris la position moyenne de la zone

le diamètre apparent du Soleil dont celui-ci (II,1,12) : « Car en le mesurant au moyen des horloges à eau, on constate que le Soleil représente la sept cent cinquantième partie de son propre cercle [NDLR : soit $0,48^\circ$]. En effet, si, pendant le temps que met le Soleil à se lever tout entier au dessus de l'horizon, il s'écoule, disons un cyathe, on constate que l'eau qu'on laisse s'écouler pendant tout un jour et toute une nuit représente sept cent cinquante cyathes. Ce sont les Égyptiens, dit-on, qui ont les premiers imaginé cette méthode ».

(5) En fait, une petite zone de pénombre s'observe au pied des gnomons placés dans sur un rayon de 150 stades autour du tropique. Cette zone est également due au fait que le Soleil n'est pas une source ponctuelle.

sans ombre pour fixer le tropique du Cancer (rappelons qu'ÉRATOSTHÈNE a également écrit un traité intitulé « sur les moyennes ») et d'autre part que la distance de 5 000 stades entre Syène et Alexandrie était établie avec la même précision et non à partir d'estimations grossières [31], sans quoi une recherche aussi précise du tropique du Cancer n'aurait eu aucun sens. Par ailleurs, la mesure au même instant et avec précision (puisqu'il faut distinguer ombre et pénombre), en des points différents, de l'ombre des gnomons autour de Syène n'était pas simple. HULTSH [23], cité par RUSSO [31], suppose que des fonctionnaires royaux avaient dû être assignés à cette tâche.

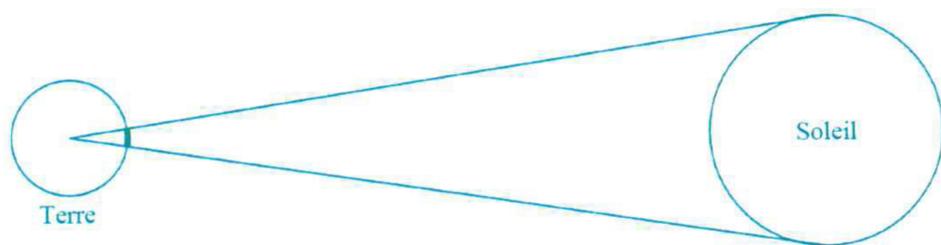


Figure 3 : On a représenté en trait gras sur cette figure, la zone à la surface de la Terre pour laquelle les gnomons n'ont pas d'ombre (ou plus précisément au pied desquels une zone de pénombre s'observe, voir note 5, page précédente). Si l'on suppose que le Soleil a pour diamètre angulaire $0,5^\circ$ et que la circonférence terrestre vaut 252 000 stades, cette zone s'étend sur 350 stades.

1.3.3. Distance entre Syène et Alexandrie

CLÉOMÈDE donne la valeur de 5 000 stades sans rien préciser à ce sujet. Si l'on poursuit néanmoins le raisonnement précédent, il semble exclu que la distance Syène-Alexandrie ait été évaluée à partir des temps moyens mis par des voyageurs pour aller d'une ville à une autre, *a fortiori* pour des caravanes de chameaux. Selon DUTKA [15], il s'agit d'un mythe véhiculé par les livres sur l'histoire de la géodésie. Selon lui, les chameaux furent introduits en Afrique du Nord par Alexandre le Grand, mais les caravanes de chameaux n'étaient pas répandues avant l'ère chrétienne.

Le seul texte nous indiquant les sources d'ÉRATOSTHÈNE pour cette mesure est celui de MARTIANUS CAPELLA (VI, 598) qui indique qu'il aurait eu recours à des arpenteurs royaux de PTOLÉMÉE (*mensores regios Ptolomaei*).

Selon Paul PÉDECH [29] : « Ce terme peut désigner aussi bien les arpenteurs chargés d'établir le cadastre agronomique qui servait de base à l'impôt que les fonctionnaires qui avaient mesuré les étapes de la navigation sur le Nil pour la perception des péages. Il faut penser plutôt au Nil, qui offrait une voie plane et à peu près rectiligne, dont les déviations étaient faciles à corriger, peut-être au moyen des données métriques fournies par la poste royale dont parlent les papyrus ».

Certains évoquent également la possibilité qu'il s'agisse de *bématistes*, hommes entraînés à faire des pas réguliers tout en les comptant pour établir des distances. Ces *bématistes* ont été notamment largement utilisés par ALEXANDRE lors de ses campagnes mili-

itaires [15]. Pour être plus complet, notons comme nous l'avons évoqué plus haut que la mesure de la distance évoquée par MARTIANUS CAPELLA concerne en fait la distance Syène-Méroé et que selon lui l'observation aurait été faite à l'équinoxe.

La ville de Méroé est également évoquée par PLINE (II, 75) non loin d'un passage sur ÉRATOSTHÈNE (II, 76) et par STRABON (I, 4, 1). Elle se trouve comme Alexandrie à 5 000 stades de Syène et plus ou moins sur le même méridien, mais du côté du sud ce qui conduit à GRATWICK [21] à penser qu'ÉRATOSTHÈNE aurait peut-être réalisé des mesures « symétriques » par rapport au tropique du Cancer. Enfin, selon le texte de CLÉOMÈDE lui-même, une autre observation aurait été faite entre Syène et Alexandrie lors du solstice d'hiver (I, 10, 5).

L'ensemble de ces remarques suggère qu'ÉRATOSTHÈNE aurait fait plusieurs observations pour obtenir une meilleure précision – observations dont CLÉOMÈDE n'aurait rendu compte que de façon simplifiée dans son ouvrage à vocation pédagogique.

1.3.4. Le parallélisme des rayons

CLÉOMÈDE justifie le parallélisme des rayons de la manière suivante : « les rayons émis par différentes parties du Soleil sur différentes parties de la Terre sont parallèles ». On peut donc avoir l'impression qu'il considère le Soleil comme une source de lumière étendue envoyant un faisceau de rayons parallèles comme une sorte de phare, en direction de la Terre. Cette vision diffère notablement de la manière moderne de présenter les choses. En effet, on réalise généralement la double approximation suivante : on suppose d'une part que le Soleil est une source ponctuelle (ce qui permet de ne représenter qu'un seul rayon arrivant en un point de la Terre et non un cône de lumière) et d'autre part que cette source est très éloignée (ce qui permet de justifier que les rayons uniques arrivant à Syène et à Alexandrie sont parallèles).

Il faut cependant rester prudent. CLÉOMÈDE parle en effet d'une ombre conique (et non cylindrique) de la Terre lorsqu'il évoque les éclipses de Lune (II, 6, 2). De plus, la zone de 300 stades autour de Syène dans laquelle les gnomons n'ont pas d'ombre ne peut s'expliquer que par le fait que les rayons du Soleil ne sont pas tous parallèles. Cette observation est d'ailleurs réutilisée par CLÉOMÈDE pour calculer le diamètre du Soleil dans un passage (I, 1, 17) qui démontre qu'il a compris ce phénomène, ce qui donnerait un résultat exact s'il ne s'était trompé sur ses estimations de la distance Terre - Soleil.

1.3.5. La valeur de la circonférence

La mesure de la circonférence terrestre donnée par CLÉOMÈDE est de 250 000 stades alors que les autres références antiques indiquent toutes 252 000 stades. Deux explications sont souvent évoquées pour expliquer cette différence. La première serait que CLÉOMÈDE dans sa volonté simplificatrice aurait arrondi les nombres donnés par ÉRATOSTHÈNE : 50 et 5 000 sont en effet des nombres ronds permettant un calcul simple. L'autre explication consiste à supposer que la mesure d'ÉRATOSTHÈNE conduisait bien à 250 000 stades et

qu'il a ensuite été ajouté 2 000 stades⁽⁶⁾ pour en faire un nombre ayant plus de diviseurs. 252 000 est en effet divisible par tous les entiers de 1 à 10 [30] et sa division par 360 donne le résultat pratique de 700 stades par degré.

1.4. La méthode de Poseidonios

Il peut enfin être intéressant de comparer, comme le fait CLÉOMÈDE, la méthode d'ÉRATOSTHÈNE à celle de POSEIDÔNIOS. Rappelons rapidement cette méthode : elle se base sur l'observation d'une même étoile (Canope, une étoile très brillante de la constellation « La Carène », très basse sur l'horizon en Égypte, mais véritable polaire des mers du Sud...), en deux points d'un même méridien : Rhodes et Alexandrie. À Rhodes les rayons provenant de Canope frôlent l'horizon local, en effet, « à peine a-t-elle été vue qu'elle se couche ». En revanche à Alexandrie, les rayons provenant de Canope font, à l'instant de sa culmination, un angle alpha avec l'horizon local d'Alexandrie (cf. figure 4).

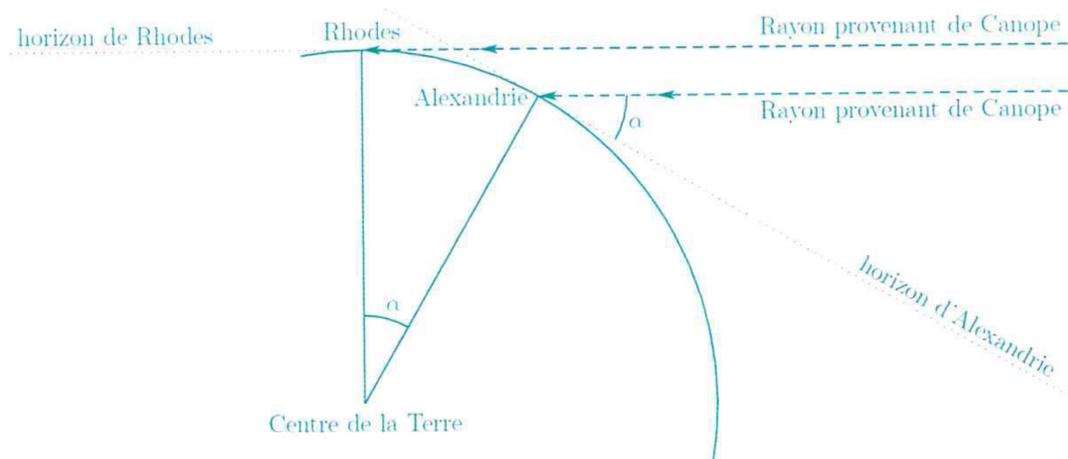


Figure 4 : Schéma représentant la méthode de POSEIDÔNIOS selon le récit de CLÉOMÈDE.

POSEIDÔNIOS suppose alors implicitement que Canope est suffisamment lointaine pour qu'on puisse considérer les rayons arrivant à Rhodes et à Alexandrie comme parallèles entre eux. L'angle alpha se retrouve donc être l'angle entre l'horizon local de Rhodes et l'horizon local d'Alexandrie. Il en déduit alors (toujours implicitement) que, vu du centre de la Terre, l'angle entre Rhodes et Alexandrie est également égal à alpha (cf. figure 4). Mesuré en unités grecques alpha vaut 1/4 de dodécatémoire. Les dodécatémoires (ou douzièmes) sont la traduction géométrique des signes du zodiaque. Alpha vaut donc 1/48° de cercle. POSEIDÔNIOS suppose alors que la distance Rhodes-Alexandrie vaut 5 000 stades. Il en conclut que la circonférence terrestre vaut $48 \times 5\,000 = 240\,000$ stades.

Cette méthode pourrait sembler à première vue plus précise. En effet, Canope peut sans conteste être considérée comme une source beaucoup plus ponctuelle que le Soleil. Elle est également plus éloignée de la Terre, ce qui entraîne un meilleur parallélisme α

(6) Cet ajout est parfois attribué à ÉRATOSTHÈNE lui-même, ou à HIPPARQUE (en se basant sur un passage de PLINE (II, 112) cependant assez obscur).

priori entre les rayons arrivant à Rhodes et à Alexandrie (on notera d'ailleurs que CLÉOMÈDE ne mentionne pas ici l'hypothèse des rayons parallèles, ce qui s'explique peut être par l'habitude de considérer la Terre comme un point par rapport à la voûte céleste). Malheureusement, il faut également tenir compte de la réfraction qui est importante pour des mesures faites sur l'horizon et fausse complètement les résultats (l'angle entre Rhodes et Alexandrie est en effet d'environ $5^\circ 1/4$ et non pas $7^\circ 1/2$). Qui plus est, Rhodes et Alexandrie étant séparées par la mer, la mesure de la distance Rhodes-Alexandrie ne pouvait être que très approximative. POSEIDÔNIOS était, semble-t-il, parfaitement conscient de ce dernier point.

Selon STRABON, il propose d'ailleurs plusieurs alternatives à son calcul, l'une d'entre elles étant basée sur une distance de 3 750 stades entre Rhodes et Alexandrie conduisant à 180 000 stades pour la circonférence terrestre. Ironie du sort, cette distance de 3 750 stades était en fait basée sur une valeur d'ÉRATOSTHÈNE qui l'avait lui-même déduite « au moyen de ses gnomons à ombre » (qui lui avaient donné une valeur de $5^\circ 1/3$ pour l'angle α) et de sa valeur de la circonférence terrestre : 252 000 stades (voir sur ce point AUJAC ([11], p. 103). C'est finalement la valeur de 180 000 stades que reprendra PTOLÉMÉE, éclipsant durablement celle d'ÉRATOSTHÈNE.

2. ÉLÉMENTS DIDACTIQUES

2.1. Le parallélisme des rayons du Soleil comme « objectif - obstacle »

Nous le disions en introduction, la mesure du périmètre terrestre par la méthode d'ÉRATOSTHÈNE est devenue une activité rituelle de l'enseignement primaire et secondaire en France, comme à l'étranger⁽⁷⁾. Quels que soient les supports dans lesquels cette activité s'exprime (manuels scolaires, fiches pédagogiques disponibles sur Internet, documents d'accompagnement des programmes...), celle-ci suit un ordonnancement qui peut être résumé comme suit :

1. Récits des observations faites à midi au solstice au pied de gnomons situés à Syène et à Alexandrie (présence ou non d'ombre aux pieds des gnomons, d'obélisques...). Dans ces récits, il n'est jamais fait mention des cadrans hémisphériques et les sources historiques ne sont que très rarement citées.
2. Demande d'explication de ses observations (cette étape est toutefois assez inhabituelle).
3. Présentation d'un schéma explicatif (cette étape est plutôt systématique : la propagation de la lumière du Soleil est figurée en lignes parallèles, la valeur de l'angle au sommet du gnomon d'Alexandrie est généralement donnée, si ce n'est pas le cas, la hauteur du gnomon d'Alexandrie et la longueur de son ombre sont des données de l'énoncé).

(7) Introduite en 2001 dans les programmes de physique-chimie de la classe de seconde, elle a toutefois disparu des programmes de 2010.

4. Indications sur la distance entre Alexandrie et Syène (la façon dont cette mesure a été faite implique parfois des caravanes de chameaux, parfois des compteurs de pas...).

Si l'on s'intéresse aux difficultés cognitives sous-jacentes aux différentes formes prises par cette activité, on s'aperçoit qu'elles apparaissent souvent négligées. Ainsi, des élèves à qui l'on demande d'expliquer à l'aide de schémas la raison pour laquelle aucune ombre n'est visible au pied des obélisques à Syène à midi au solstice d'été alors qu'au même moment des ombres sont visibles aux pieds des obélisques à Alexandrie, représentent la propagation de la lumière du Soleil en utilisant des rayons divergents (cf. figure 5) [14, 16, 28]. C'est l'étape 2 de l'organisation usuelle présentée ci-dessus.

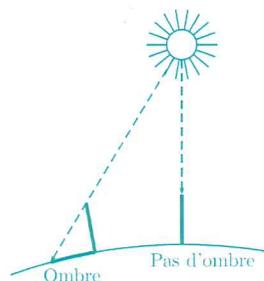


Figure 5 : Dessin prototypique d'élèves à qui l'on demande d'expliquer pourquoi au solstice d'été deux gnomons ne projettent pas la même ombre en deux endroits différents de la Terre situés le long du même méridien [14, 16, 28]. Nous ne considérons ici que les cas où la courbure de la Terre est représentée par les élèves, ce qui n'est pas toujours le cas (certains élèves relient Alexandrie et Syène par une ligne droite).

Cette modélisation « spontanée » de la propagation de la lumière du Soleil s'avère tout à fait performante : elle permet d'expliquer pourquoi il n'y a pas d'ombre à un endroit et une ombre à un autre endroit de la Terre et pourrait même, dans une certaine mesure, être considérée comme correcte (cf. note 8). Précisons à cette occasion, qu'il semble (mais les sources disponibles ne s'accordent pas toutes sur ce point) qu'ANAXAGORE DE CLAZOMÈNE (500-428 av. J.-C.), convaincu que la Terre était plate et le Soleil relativement proche, aurait évalué la distance Terre-Soleil à partir d'une modélisation de la propagation du Soleil en rayons divergents. L'application du théorème du PYTHAGORE l'aurait conduit à une valeur proche de 6 500 km. Représenter la propagation de la lumière du Soleil en des rayons parallèles n'est pas naturel⁽⁸⁾. Les élèves choisissent spontanément un modèle en rayons divergents et font figurer le Soleil sur la plupart de leurs dessins. Le passage de la divergence au parallélisme nécessite un passage à la limite complexe, un saut conceptuel dont la difficulté ne doit pas être sous-estimée.

(8) Cette modélisation est discutable dans la mesure où le Soleil est une source étendue : chaque point du Soleil émet de la lumière dans toutes les directions. Mais l'éloignement du Soleil est tel que cette divergence tend vers un parallélisme. Cependant, le Soleil n'est pas un point, mais une somme de points et pour tous ces points, il se produit un phénomène identique. En conséquence, les gnomons de Syène et d'Alexandrie sont atteints par des cônes divergents issus de tous les points du Soleil, ce qui donne naissance à des zones de pénombre au pied des gnomons (y compris au pied du gnomon de Syène).

Pourtant, la plupart des fiches d'enseignement conçues en référence à la découverte d'ÉRATOSTHÈNE se contentent d'énoncer l'hypothèse du parallélisme sans que celle-ci ne soit réellement construite, voire interrogée. Cette hypothèse est parfois posée comme alternative à l'hypothèse des rayons divergents d'Anaxagore, mais en tant que modélisation de la propagation de la lumière du Soleil, elle fait rarement l'objet d'une construction spécifique⁽⁹⁾.

L'activité visant à faire reproduire aux élèves la mesure de la circonférence de Terre par la méthode dite d'ÉRATOSTHÈNE a donc, selon nous, deux inconvénients majeurs. Le premier, c'est que telle qu'elle apparaît dans les documents à finalité scolaire (notamment) cette activité présente de nombreux anachronismes (l'utilisation de la tangente, l'évocation des chameaux...) et il est rare que des sources historiques telles que le texte de CLÉOMÈDE soient utilisées *per se*.

On peut donc questionner son caractère « historique ». Le second, c'est qu'elle laisse de côté une difficulté de taille, celle liée à la représentation de la propagation de la lumière pour une source très éloignée. Ce constat anéantit-il pour autant tout projet d'insertion de la mesure du périmètre terrestre par la méthode dite « d'ÉRATOSTHÈNE » au sein de la sphère scolaire ? Si tel n'est pas le cas, quelles pourraient être les conditions d'une telle insertion ?

Répondre à ces deux questions revient à concevoir un cadre didactique qui vise la construction d'un savoir (le parallélisme des rayons du Soleil) que nous posons comme un « objectif-obstacle » (au sens de MARTINAND) et qui préserve le caractère historique de la mesure du périmètre terrestre en mettant les élèves en contact avec une source de première main. Nous appelons ce cadre « reconstruction didactique ». Il vise l'élaboration d'une séquence d'enseignement et renvoie pour partie aux principes fondateurs de « l'ingénierie didactique » qui inclut une prise en compte de trois types de contraintes [10] :

- ♦ *épistémologiques* (le calcul du périmètre terrestre s'appuie sur plusieurs hypothèses dont celle du parallélisme des rayons du Soleil ; celle-ci est délicate, car le Soleil est certes une source située à l'infini, mais n'est pas une source ponctuelle) ;
- ♦ *cognitives* (l'idée que la propagation de la lumière du Soleil peut être figurée en des rayons parallèles constitue une difficulté majeure et s'oppose à une figuration spontanée en rayons divergents issus d'un point) ;
- ♦ *didactiques* (l'objectif d'une séquence d'enseignement construite sur la base de la mesure historique du périmètre terrestre par ÉRATOSTHÈNE doit prendre en compte la difficulté énoncée ci-dessus et viser une nouvelle schématisation de la lumière du Soleil par les élèves).

(9) À ce propos, précisons toutefois qu'il existe, dans la littérature pédagogique, certaines activités consacrées à la découverte d'ÉRATOSTHÈNE qui ont pris le parallélisme des rayons du Soleil comme un objectif d'apprentissage. Ces activités suggèrent de construire cette hypothèse sur la base d'observations locales d'ombres formées au pied de petits bâtons proches l'un de l'autre [14, 16]. L'inconvénient de ce type d'activité est qu'il oblige les élèves à admettre que ce qui se produit localement (à l'échelle d'une feuille de papier par exemple) se produit de manière identique à l'échelle d'une portion du cercle terrestre.

Étape 1 : Présentation d'un phénomène / d'un problème à résoudre	<i>Au solstice d'été, à midi, lorsque le Soleil est au milieu de sa course, un bâton planté verticalement projette une ombre à Alexandrie alors qu'aucune ombre n'est visible à Syène, ville située sur le même méridien^(*). Faites un schéma où vous expliquerez les raisons de ce phénomène.</i>
Étape 2 : Propositions d'explication et confrontation	Sur les schémas des élèves : – La propagation de la lumière du Soleil est figurée en lignes parallèles ; – La propagation de la lumière du Soleil est figurée en rayons divergents ; – La ligne reliant Alexandrie à Syène est courbe ou droite. <i>Ces observations ont probablement permis à ANAXAGORE de calculer la première mesure de la distance Terre-Soleil. Ce calcul repose sur les hypothèses suivantes :</i> – la Terre est plate ; – le Soleil est proche et ses rayons divergent. <i>Comment a-t-il pu procéder ? Discuter cette méthode. Est-elle toujours valable si l'on considère que la Terre est sphérique et le Soleil très éloigné ?</i>
Étape 3 : Étude historique	L'étude historique se fait sur la base du texte de CLÉOMÈDE. (1) Les élèves sont invités à discuter : – l'architecture du texte ; – les hypothèses nécessaires au calcul du périmètre terrestre ; – l'instrument utilisé (le « cadran concave ») ; (2) Les élèves sont invités à reproduire pas à pas la construction décrite dans le texte de CLÉOMÈDE (cf. figure 2), puis à vérifier le résultat de la mesure. (3) Les sources d'incertitudes sont discutées.
Étape 4 : Modélisation et conceptualisation	<i>Que pensez-vous de la troisième hypothèse énoncée par CLÉOMÈDE ? Comment peut-on montrer expérimentalement que deux droites issues d'un point très éloigné peuvent être considérées en un certain lieu comme parallèles ?</i> (1) On peut réaliser l'expérience suivante : deux fils de 2 m de long sont attachés à une extrémité à un même clou. Lorsque les fils sont tendus, leurs extrémités sont quasi-parallèles. (2) Ce phénomène est expliqué à partir de la propriété de la somme des angles dans un triangle rectangle dont l'angle au sommet tend vers zéro (cf. figure 6).

(*) On suppose comme acquises les notions suivantes : solstice, méridien, midi solaire, ombre, propagation rectiligne de la lumière, angles alternes égaux.

Tableau 1 : Proposition de reconstruction didactique pour approcher la géométrisation de la propagation de la lumière du Soleil à partir du récit de CLÉOMÈDE.

Nous ajoutons à ces trois contraintes le fait que la « reconstruction didactique » vers laquelle nous tendons s'appuie sur une réorganisation d'idées explicitement situées historiquement et inclut ainsi l'utilisation d'un matériau reconnu comme historique et pouvant être identifié comme tel par les élèves.

2.2. Proposition de reconstruction didactique d'une mesure historique du périmètre terrestre

La reconstruction que nous avons imaginée (cf. tableau 1) émerge de la connaissance que nous avons des difficultés des élèves à propos de la propagation de la lumière du Soleil et de la nécessité de présenter de manière explicite des éléments historiquement situés. Le texte utilisé est extrait de la traduction française du Mouvement circulaire des corps célestes de Germaine AUJAC, et se trouve en annexe de cet article.

La première étape consiste en la présentation d'un fait d'observation (pas d'ombre au pied des gnomons situés à Syène, une ombre aux pieds de ceux situés à Alexandrie, à midi, le jour du solstice d'été). Les élèves sont invités à proposer un schéma d'explication dans lequel plusieurs modélisations sont susceptibles de s'exprimer (rayons divergents, parallèles, ligne entre Alexandrie et Syène plate ou courbe...). Ces schémas d'explication sont discutés lors d'un débat collectif, et mis en perspective d'une explication qui semble avoir été suggérée par ANAXAGORE pour proposer une première estimation de la distance Terre-Soleil. C'est la deuxième étape. S'ensuit une étape d'étude historique dont l'objectif est d'approcher l'explication et la méthode décrites par CLÉOMÈDE. Les élèves sont invités à expliciter l'architecture du texte (partie 3 du texte traduit par Richard GOULET, cf. annexe), à retrouver les hypothèses nécessaires au calcul du périmètre terrestre, et à reproduire pas à pas la construction décrite (cf. figure 2). À l'issue de cette troisième étape, les approximations et les choix faits par CLÉOMÈDE sont discutés à la lumière des savoirs astronomiques en jeu (diamètre apparent du Soleil, rapport des distances, échelles...). La quatrième étape vise la construction de la géométrisation de la propagation de la lumière du Soleil à partir d'un point. L'idée que le Soleil n'est pas une source ponctuelle peut-être discutée, mais ne fait pas l'objet d'un travail spécifique ici. Cette étape inclut un travail géométrique visant un passage à la limite (complexe) illustré par la figure 6 ci-dessous.

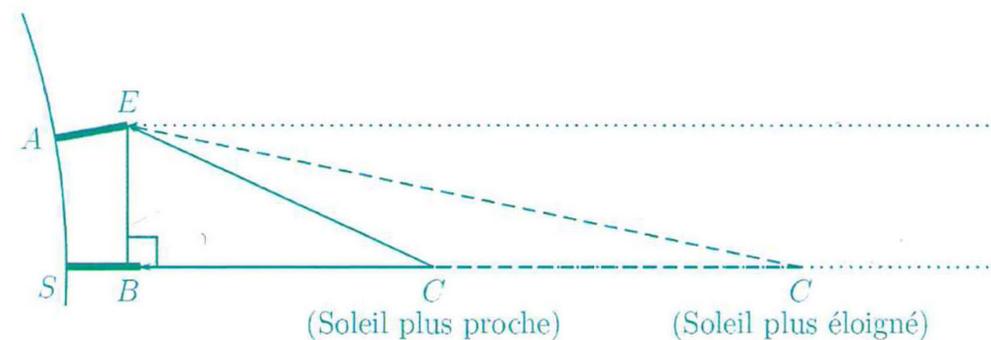


Figure 6 : Plus le Soleil C s'éloigne et plus l'angle C tend vers zéro et plus les droites passant par les points E et B tendent à devenir parallèles entre-elles.

L'idée de ce travail géométrique est de partir de la représentation spontanée des élèves (cf. figure 5) et de leur montrer que lorsque le point C se déplace le long de la droite SB en s'éloignant de la Terre, l'angle C devient proche de zéro. Si l'on considère que la somme des angles dans un triangle est toujours égale à 180° et que l'angle B est un angle droit, alors lorsque C tend vers zéro, l'angle E tend vers 90° . Ce passage à la limite conduit à conclure que lorsque le Soleil est très éloigné de la Terre, les droites passant respectivement par E et B sont parallèles entre elles. Les limites de ce travail géométrique c'est qu'il s'appuie sur l'idée que le Soleil est une source lumineuse ponctuelle. La séance peut éventuellement s'achever sur une comparaison avec la méthode de POSEIDONIOS décrite par CLÉOMÈDE que l'on trouvera également en annexe.

CONCLUSION

La mise en perspective de l'approche choisie par CLÉOMÈDE et notre propre reconstruction révèle deux parcours « hétéromorphes ». Ceci n'est finalement guère surprenant si l'on considère que les savoirs scolaires apparaissent le plus souvent selon un ordre qui a peu à voir avec l'ordre historique. Autrement dit, **la genèse historique ne résiste pas au procès qui conduit le savoir du monde savant vers le monde scolaire** puisque celui-ci est « inévitablement finalisé dans un cadre scolaire » ([24], p. 195). Cette disjonction entre genèse scolaire et genèse historique doit pourtant pouvoir s'accorder avec les plaidoyers en faveur d'une plus grande insertion de l'histoire des sciences dans l'enseignement. Pour cela, l'élaboration de séquences d'enseignement se donnant pour but d'articuler « une approche du sens historique et une initiation aux connaissances opératoires » [27] doit, selon nous, réussir le pari de concilier l'idée d'une reconstruction contrainte par des exigences didactiques (un « programme » spécifique au monde de l'école), tout en faisant une place importante au matériau historique lui-même ; deux exigences qui s'avèrent parfois largement antagoniques. L'une des difficultés de cet exercice est d'identifier le matériau historique pertinent et de lui assigner une juste place afin que son exploitation en classe prenne sens. Une connaissance des idées des élèves à propos d'un savoir donné peut guider ce travail d'élaboration et doit s'accompagner d'une enquête historique minutieusement menée.

BIBLIOGRAPHIE

Auteurs anciens évoquant la mesure d'Ératosthène et valeur référencée

- [1] CENSORIN (III^e apr. J.-C.). *Du jour natal*. XIII --> 252 000 stades.
- [2] CLÉOMÈDE (I^{er} ou II^e apr. J.-C.). *Le mouvement circulaire des corps célestes*. I, 10, 1-6 --> 250 000 stades (cf. annexe).
- [3] GEMINOS DE RHODES (fl. 50 av. J.-C.). *Introduction aux phénomènes*. XVI, 7 (ÉRATOSTHÈNE non cité explicitement) --> 252 000 stades.
- [4] HÉRON d'Alexandrie (fl. 65 apr. J.-C.). *De la Dioptre*. XXXVI --> 252 000 stades.

- [5] MACROBE (fl. 400 apr. J.-C.). *Commentaires au songe de SCIPION*. Livre I, chap. XX, livre II, chap. VI --> 252 000 stades.
- [6] MARTIANUS CAPELLA (fl. 415 apr. J.-C.). *Noces de la Philologie avec Mercure*. VI, 596-599 --> 252 000 stades (à partir de l'arc entre Méroé et Syène...), éd. Les Belles Lettres, tome VI, livre VI, trad. de B. FERRE, Paris, 2007.
- [7] PLINE L'ANCIEN (I^{er} av. et apr. J.-C.). *Histoire naturelle*. Livre II, LXXV, LXXVI, CXII, CXIII --> 252 000 stades.
- [8] STRABON (I^{er} av. J.-C.). *Géographie*. Livre II, 5, 4, livre II, 5, 7, livre XVII, I, 48 --> 252 000 stades.
- [9] VITRUVÉ (I^{er} av. J.-C.). *L'architecture*. I, 6 --> 252 000 stades ou 31 500 000 pas.

Auteurs modernes

- [10] ARTIGUE M. « Ingénierie didactique ». *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 1990, 9 (3), p. 283-307.
- [11] AUJAC G. *Ératosthène de Cyrène, le pionnier de la géographie*. Paris : Éditions du CHTS, 2001.
- [12] BOWEN A. "Cleomedes and the measurement of the Earth : a question of procedures". *Centaurus*, 2008, 50 (1-2), p. 195-204.
- [13] DELAMBRE J.-B. *Histoire de l'astronomie ancienne et Histoire de l'astronomie moderne*. Paris, 1817 et 1819.
- [14] DUCOURANT D. « L'observation d'Ératosthène en cinquième ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, juillet-août-septembre 2007, vol. 101, n° 896, p. 825-841.
- [15] DUTKA J. "Eratosthenes' measurement of the Earth reconsidered". *Arch. Hist. Exact Sci.*, 1993, 46 (1), p. 55-66.
- [16] FARGES H., DI FOLCO E., HARTMANN M. et JASMIN D. *Mesurer la Terre est un jeu d'enfant : sur les pas d'Ératosthène*. Paris : Le Pommier (2002).
- [17] FEIGENBERG J., LAVRIK L. V., SHUNYAKOV V. "Space Scale : Models in the History of Science and Student's Mental Models". *Science and Education*, 2002, 11, p. 377-392.
- [18] GAILHANOU A. et TROPANO S. G. « Travaux pratiques transfrontières ». *Bull. Un. Phys.*, avril 2000, vol. 94, n° 823, p. 851-853.
- [19] GOLDSTEIN B. R. "Eratosthenes on the 'Measurement' of the Earth". *Historia Mathematica*, 1984, 11, p. 411-416.
- [20] GOULET R. *Cléomède : théorie élémentaire*. Paris : Vrin, 1980.
- [21] GRATWICK A.S. "Alexandria, Syene, Meroe: Symmetry in Eratosthenes' Measurement of the World" dans *The passionate intellect, essays on the transformation of classical traditions*, éd. Lewis Ayres, Rutgers University, New Brunswick, 1995.

- [22] HAFSAOUI M. « Application de la méthode d'Ératosthène : évaluation de la circonférence d'un ballon de football et de celle de la Terre ». *Bull. Un. Phys.*, juillet-août-septembre 2001, vol. 95, n° 836, p. 1263-1265.
- [23] HULTSCH F. "Poseidonios über die Grösse und Entfernung der Sonne, in « Abhand. der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen ». *Philolog.-his. Klasse* (n.F.) 1 (1897).
- [24] JOSHUA S. et DUPIN J.-J. *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*, PUF, 2003.
- [25] MARICAL R. « La mesure d'Ératosthène en totale autonomie, depuis nos latitudes ». *Bull. Un. Phys.*, juillet-août-septembre 2001, vol. 95, n° 836, p. 1255-1262.
- [26] MARTINAND J.-L. « Des objectifs-capacités aux objectifs-obstacles ; deux études de cas ». In N. BERDIAZ et C. GARNIER, *Construction des savoirs, obstacles et conflits*. CIRADE, Agence d'ARC inc. Ottawa, 1990, p. 217-227.
- [27] MARTINAND J.-L. « Histoire et didactique de la physique et de la chimie, quelles relations ». *Didaskalia*, 1993, 2, p. 89-99.
- [28] MERLE H. « Sensibilisation à l'histoire des sciences d'enfants de 9 à 11 ans : l'expérience d'Ératosthène ». *Actes des 17^{es} journées internationales sur l'enseignement des sciences*, GIORDAN A., MARTINAND J.-L. et RAICHVARG D. (eds), 1994, p. 475-480.
- [29] PEDECH P. *La géographie des Grecs* (P 100). Paris : PUF, 1976.
- [30] RAWLINS D. "The Eratosthenes – Strabo Nile map. Is it the earliest surviving instance of spherical cartography? Did it supply the 5000 stades arc for Eratosthenes' experiment?". *Arch. Hist. Exact Sci.*, 1982, 26 (3), p. 211-219.
- [31] RUSSO L. *La rivoluzione dimenticata; il pensiero scientifico greco e la scienza moderna*. Milano : Feltrinelli, 1996.
- [32] SIMAAN A. « Sur l'expérience d'Ératosthène ». *Bull. Un. Phys.*, juillet-août-septembre 2002, vol. 96, n° 846, p. 1193-1196.



Nicolas DECAMP
Maître de conférences
Laboratoire de didactique André Revuz
Université Paris-Diderot
Paris



Cécile de HOSSON
Maître de conférences
Laboratoire de didactique André Revuz
Université Paris-Diderot
Paris